

双环网络并行最优寻径策略及宽直径的研究

刘辉, 张珍, 方木云, 郑啸, 陈业斌

(安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山 243002)

摘要: 将双环网络拓扑结构映射到平面直角坐标系, 基于直角坐标系研究双环网络的并行最优寻径方法。首先研究坐标轴上节点及其等价节点的分布规律, 建立等价节点分布模型, 得出基于等价节点的并行最优寻径策略及双环网络宽直径求解方法。在双环网络最小路径图 (MDD) 的基础上拓展, 提出并行路径图 (PDD) 的设计思路并予以仿真实现, 基于 PDD 图, 设计两点间 2 条内点不交的并行最短路径的快速求解方法。仿真实验表明, 宽直径分布随步长的变化呈现一定波动性, 相对于传统的寻径方式, 并行最优寻径明显提高了网络传输效率。

关键词: 双环网络; 并行寻径; 并行路径图; 宽直径

中图分类号: O157.6; TP393

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)08-0063-08

Research on optimal parallel routing and wide diameter of unidirectional double-loop networks

LIU Hui, ZHANG Zhen, FANG Mu-yun, ZHENG Xiao, CHEN Ye-bin

(Department of Computer Science, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002, China)

Abstract: A new method to research optimal parallel routing of unidirectional double-loop networks (DLN) is presented based on Cartesian coordinates. Firstly, the distributed model of copy nodes is obtained under the research on the distributed rules of the copy nodes of nodes on both X axis and Y axis in the minimum distance diagram (MDD). Using this distributed model of copy nodes, the optimal parallel routing method is provided, as well as calculating method of wide diameter of DLN. Secondly, the parallel distance diagram (PDD) of DLN which is expanded by MDD is designed and simulated. Based on the PDD, a method to find two shortest parallel paths quickly without any repeating node was proposed. At last, the simulation of the distribution of wide diameter of DLN is given. The result of simulation indicates that the characteristic of wide diameter distribution is reposeful undulation. Compared with traditional routing method, optimal parallel routing method improved the transition efficiency of DLN obviously based on the simulation results.

Key words: double-loop networks; parallel routing; parallel distance diagram; wide diameter

1 引言

双环网络是计算机互连网络或通信系统的一类重要拓扑结构, 广泛用于计算机局域网和各种平行处理结构, 其中有向图论模型是指这样的有向图 $G(N;1,h)$, 它的每个节点记为 $0,1,\dots,N-1$, 从节点 i 发出 2 条有向边 $i \rightarrow i+1(\text{mod } N)$ 、 $i \rightarrow i+$

$h(\text{mod } N)$, 分别记为 $[+1]$ 边、 $[+h]$ 边, 其中 h 为自然数, $1 < h < N$ 。图 1 所示为双环网络 $G(8;1,3)$ 。

双环网络的研究主要集中在直径及连通度方面^[1-6], 然而, 在并行系统中, 信息可以通过若干条内点不交的路径并行传输, 仅考虑单一路径是不够的。用 w 连通图 G 来表示超大规模并行处理系统的互连网络时, 由 Menger 定理知, G 中任何两

收稿日期: 2013-05-05; 修回日期: 2014-04-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61003311, 61300059); 安徽省教育厅重大基金资助项目(ZD2008005-1); 安徽省教育厅重点基金资助项目(KJ2012A262, KJ2013A058)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61003311, 61300059); The Major Project of the Education Department of Anhui Province (ZD2008005-1); The Natural Science Foundation of Education Department of Anhui Province (KJ2012A262, KJ2013A058)

点之间可以同时用 w 条内点不交的路径将信息从一个点传输到另一个点。这样不但大大提高网络传输效率，而且减少数据丢失的可能性，从而显著提高网络的有效性和可靠性。为此，将网络容错性和有效性结合起来，给出新的度量参数——宽直径。对于度量实时并行处理系统的互连网络的容错性和有效性，宽直径是比连通度和直径更合适的参数^[7]。

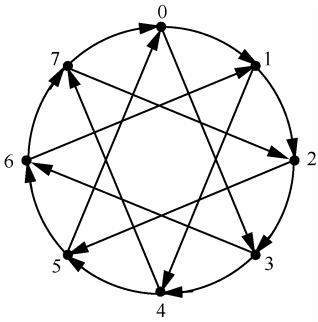


图 1 双环网络 $G(8;1,3)$

已有研究表明，对于一般网络，求其宽直径是个 NP-hard 问题^[8]。有向双环网络是两正则两连通的有向图，因此，其宽直径指 2 宽直径。文献[9,10]给出其 2 宽直径 $d_2(G)$ 的求解方法，证明繁琐，研究方法不够直观。

针对这一 NP-hard 问题，本文提出另一种研究思路：将双环网络拓扑结构映射到平面直角坐标系^[11]，研究坐标轴上节点及其等价节点的分布规律，在最小路径图(MDD, minimum distance diagram)的基础上进行拓展，提出双环网络并行路径图(PDD, parallel distance diagram)的设计思路并予以仿真实现，使双环网络并行研究有图可依，基于 PDD 图，设计任两点间 2 条不交的并行最短路径的快速求解方法，在此基础上，计算双环网络节点的宽距离及网络的宽直径。

2 定义和引理

设 $G = G(V, E)$ 是简单无向 k 连通图， u, v 是 $V(G)$ 中任意 2 个不同的顶点。 $P_i (1 \leq i \leq k)$ 表示连接 u, v 的第 i 条内部不交的路， $|P_i|$ 表示路 P_i 的长。由 Menger 定理知， G 中存在 k 条内点不交的 (u, v) 路集 $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ ，称为 G 中一个宽度为 k 的 (u, v) 路系。 Γ 中最大路长记为 $d(\Gamma)$ ，即 $d(\Gamma) = \max\{|P_1|, |P_2|, \dots, |P_k|\}$ ， G 中所有宽度为 k 的 (u, v) 路系构成的集合记为 $D_k(u, v)$ 。

定义 1^[7] u 和 v 间的 k 宽距离 $d_k(u, v) = \min\{d(\Gamma) : \Gamma \in D_k(u, v)\}$ ， G 的 k 宽直径定义为： $d_k(G) = \max\{d_k(u, v) : u, v \in V(G), u \neq v\}$ 。

定义 2^[4] G 的平均距离定义为

$$\overline{d(G)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{1}{(N-1)} \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} \right]$$

其中， d_{ij} 表示节点 i 到节点 j 的最短距离。 $d_{ij} = 0 (i = j)$ ，基于双环网的对称性， $\overline{d(G)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} d_j$ ， d_j 表示节点 0 到节点 j 的最短距离。

文献[12]已证明双环网的最小路径图的形状是 L 形。构图方法如下：把 Euclid 平面上的所有格点排成序列 $(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2) \dots$ 在每一坐标 (x, y) 处放置数 $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ，其中， $k = x + (y \cdot h) \pmod{N}$ ，如在此之前数 k 已出现过，则空出此格，直到数 $0, 1, \dots, N-1$ 都安放为止，易知若数 k 坐标为 (x, y) 处，则从节点 0 到节点 k 的距离是 $x + y$ 。

图 2 为双环网络 $G(8;1,3)$ 的 MDD，图 3 所示的 L 形区域称为具有参数 (S, T, m, n) 的一个 L 形瓦，其中， $P = T - m$ ， $Q = S - n$ ， $N = ST - mn$ ，直径 $d(G) = P + Q + \max(S, T) - 2$ ，节点平均距离为：

$$\overline{d(G)} = \frac{1}{N} \left[\left(\frac{TS}{2} - mn \right) (T + S - 2) + \frac{mn(m+n-2)}{2} \right]$$

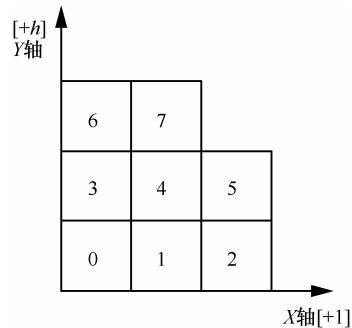


图 2 $G(8;1,3)$ 对应的 L 形瓦

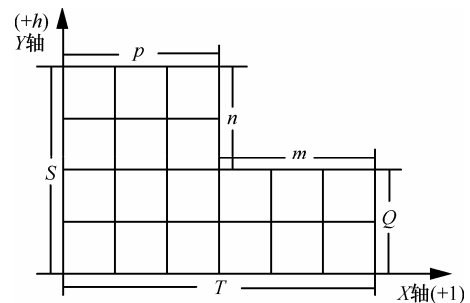


图 3 有向双环网络对应的 L 形瓦参数

对于双环网络，有如下重要性质。

引理 1^[13] L 形瓦参数 S 、 T 、 m 、 n ，可由下列等式计算。

$$S = \min\{k | kh \equiv j \pmod{N}, k \geq j \geq 0, k = 1, 2 \dots N-1\}$$

$$m = \{j | Sh \equiv j \pmod{N}, j \geq 0\}$$

$$T = \min\{j | kh \equiv j \pmod{N}, j > k \geq 0, j = 1, 2 \dots N-1\}$$

$$n = \{k | kh \equiv T \pmod{N}, k \geq 0\}$$

引理 2^[14] $T > n$ ， $S \geq m$ 且 $\gcd(T, S, m, n) = 1$ 。

引理 3^[14] $P + Qh \equiv 0 \pmod{N}$ ， $-m + Sh \equiv 0 \pmod{N}$ ，

$$T - nh \equiv 0 \pmod{N}。$$

3 直角坐标系下双环网络并行最优寻径

3.1 L 形瓦非坐标轴上节点的并行最优寻径

假设节点 u 所在的坐标为 (x, y) ，且 $x > 0, y > 0$ ，则其最短路径 $x[+1] + y[+h]$ ，至少存在 2 条并行不交最短路径：基于 $[+1]$ 边优先寻径，先走 $[+1]$ 边，再走 $[+h]$ 边： $[+1]$ 、 $[+1]$ 、 \dots 、 $[+h]$ 、 $[+h]$ ；或基于 $[+h]$ 边优先寻径，先走 $[+h]$ 边，再走 $[+1]$ 边： $[+h]$ 、 $[+h]$ 、 \dots 、 $[+1]$ 、 $[+1]$ ，除这 2 条最短路径外，也可能 $[+1]$ 、 $[+h]$ 边交叉走： $[+1]$ 、 $[+h]$ 、 \dots 、 $[+1]$ 、 $[+h]$ ，对于以上情形，最短路径的长度均为 $x + y$ 。对于 L 形瓦上非坐标轴节点而言，节点从 0 节点出发，基于 $[+h]$ 边优先寻径还是 $[+1]$ 边优先寻径并不重要，只要遵循最短路径 $x[+1] + y[+h]$ 的行走规则，即 $[+1]$ 边走 x 步， $[+h]$ 边走 y 步，就可以到达目的节点 u 。2 条平行路径只要路径上的节点不重复即可。此时， $d_2(0, u) = x + y$ 。

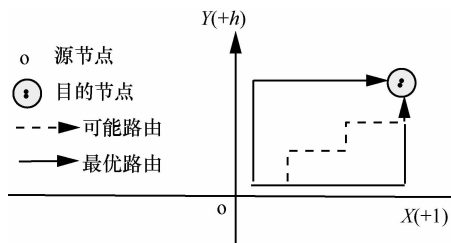


图 4 非坐标轴上节点路由

3.2 L 形瓦坐标轴上节点的并行最优寻径

当节点位于 L 形瓦坐标轴上，L 形瓦内只存在一条最短路径，仅仅借助 L 形瓦无法进行并行路由，需要找到节点的等价节点，如图 5 所示。

图 5 阴影部分图形为双环网络 $G(39;1,17)$ 的 L 形瓦。设源节点为 0，目的节点为 1，1 节点在 x 轴上，对应最短路径： $0 \rightarrow 1$ ，1 节点等价节点坐标 $(6, 2)$ ，

最短路径为： $0 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 20 \rightarrow 21 \rightarrow 22 \rightarrow 23 \rightarrow 1$ 。此时，并行最短路径起始边一致： $[+1]$ 边开始， $[+1]$ 边结束或 $[+h]$ 边开始， $[+h]$ 边结束。

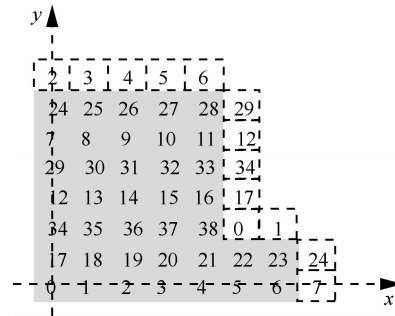


图 5 坐标轴上节点路由

因此，对于坐标轴上节点，寻找其 L 形瓦之外的等价节点成为解决节点并行路由的关键。

定义 3 双环网络 $G(N;1,h)$ L 形瓦内的节点 u 在第一象限上分布在 L 形瓦外的所有等价节点中，距离源点最近的等价节点称为最优等价节点，相对最优节点而言，距离稍远的等价节点称为次优等价节点。

考察直角坐标系中 0 节点分布，0 节点坐标 $(0, 0)$ ， (P, Q) ， $(-m, S)$ ， $(T, -n)$ ，分别建立从 0 节点到其等价节点的矢量 $\vec{p} = P\vec{x} + Q\vec{y}$ ， $\vec{\sigma} = T\vec{x} - n\vec{y}$ ， $\vec{v} = -m\vec{x} + S\vec{y}$ ，如图 6 所示。则第一象限 $G(N;1,h)$ L 形瓦坐标轴上节点 $u(x_0, y_0)$ 可沿 \vec{p} 或 $\vec{\sigma}$ 或 \vec{v} 方向快速找到其第一象限内的等价节点 $(x_0 + P, y_0 + Q)$ 或 $(x_0 + T, y_0 - n)$ 或 $(x_0 - m, y_0 + S)$ 。

1) $P > 1, Q > 1$

① 节点 u 在 x 轴上，此时 $y_0 = 0$ 。如图 6(a) 所示，节点 u 沿 \vec{p} 或 \vec{v} 方向找到其等价节点。分 2 种情形讨论。

a. $m \leq x_0 < T, y_0 = 0$

节点 u 沿 \vec{p} 方向得到其等价节点 $(x_0 + P, y_0 + Q)$ ；节点 u 沿 \vec{v} 方向得到其等价节点 $(x_0 - m, y_0 + S)$ 。

下面证明 u 的最优等价节点由 \vec{v} 方向得到。根据定义 3，只需比较等价节点到源点 0 的距离即可。

根据引理 2， $T > n$ ，可得： $P + m > n \Rightarrow P + m > S - Q \Rightarrow P + Q > S - m$ ，得证。

u 的最优等价节点基于 \vec{v} 方向，分布在 L 形瓦正上方第 S 层 $(0, S)$ ， $(1, S)$ ， \dots ， $(P-1, S)$ 连续区域内，记为 $D1$ 。 u 的 2 条内点不交的路径为 $P1: x_0[+1]$ 及 $P2: (x_0 - m)[+1] + S[+h]$ 。

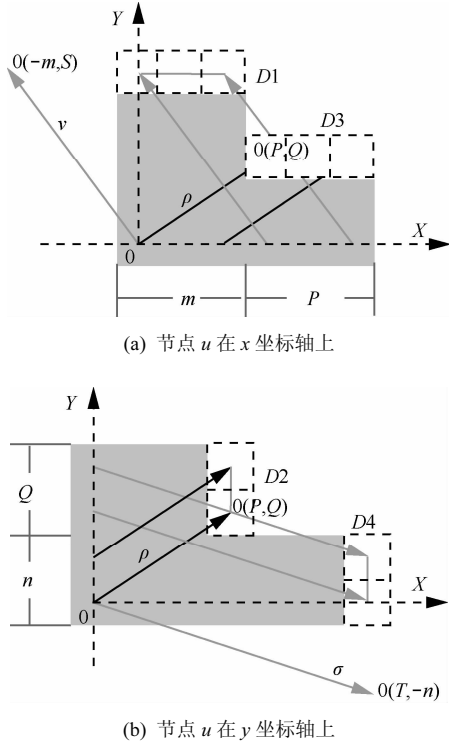


图 6 坐标轴上最优等价节点分布模型

b. $0 \leq x_0 < m, y_0 = 0$

同理, 可知 u 的最优等价节点由 $\bar{\rho}$ 方向得到, 且等价节点分布在 $(P, Q), (P+1, Q) \dots, (P+m-1, Q)$ 连续区域内, 记为 $D3$. u 的 2 条内点不交的路径为 $P_1: x_0[+1]$ 及 $P_2: (x_0 + P)[+1] + Q[+h]$.

② 节点 u 在 y 轴上, 此时 $x_0 = 0$. 如图 6(b) 所示, 节点 u 沿 $\bar{\rho}$ 或 $\bar{\sigma}$ 方向找到其等价节点.

a. $n \leq y_0 < S, x_0 = 0$

节点 u 沿 $\bar{\rho}$ 方向得到其等价节点 $(x_0 + P, y_0 + Q)$; 节点 u 沿 $\bar{\sigma}$ 方向得到其等价节点 $(x_0 + T, y_0 - n)$.

下面证明 u 的最优等价节点由 $\bar{\sigma}$ 方向得到.

根据引理 2, $S \geq m$, 可得: $Q + n \geq m \Rightarrow P + Q + n > P + m \Rightarrow P + Q > T - n$, 得证.

u 的最优等价节点可由 $\bar{\sigma}$ 方向得到, 且等价节点分布在 $(T, 0), (T, 1) \dots, (T, Q-1)$ 连续区域内, 记为 $D4$. u 的 2 条内点不交的路径为 $P_1: y_0[+h]$ 及 $P_2: T[+1] + (y_0 - n)[+h]$.

b. $0 \leq y_0 < n, x_0 = 0$

同理, u 的最优等价节点可由 $\bar{\rho}$ 方向得到, 且等价节点分布在 $(P, Q), (P, Q+1) \dots, (P, Q+n-1)$ 连续区域内, 记为 $D2$. u 的 2 条内点不交的路径为 $P_1: y_0[+h]$ 及 $P_2: P[+1] + (y_0 + Q)[+h]$.

根据以上分析, 当 $P > 1, Q > 1$ 时, 坐标轴上 u

节点的最优等价节点分布在图 6 虚线所示的 $D1$ 、 $D2$ 、 $D3$ 、 $D4$ 区域, 此时, 双环网络的 2 宽直径 $d_2(G) = P + Q + \max(S, T) - 1 = d(G) + 1$.

2) $P > 1, Q = 1$

① $m \leq x_0 < T, y_0 = 0$

u 的最优等价节点可由 \bar{v} 方向得到, 和 $P > 1, Q > 1$ 时 $m < x_0 < T, y_0 = 0$ 的情形相同.

② $0 \leq x_0 < m, y_0 = 0$

u 的最优等价节点分布在 $(P, Q), (P+1, Q), \dots, (P+m-1, Q)$ 连续区域内, 由 $\bar{\rho}$ 方向得到, 因为 $Q=1$, 所以源点 0 无法基于 $[+h], [+1] \dots [+h]$ 路由至 u . 考察其次优等价节点. 如图 7(a) 所示, 节点沿 \bar{v} 方向路由, 可得等价节点依次为: $(P-m, S+Q), (P-m+1, S+Q), \dots, (P-1, S+Q)$, 因 $Q=1$, 即 $(P-m, S+1), (P-m+1, S+1), \dots, (P-1, S+1)$. 如果 $P \geq m$, 则等价节点分布在第 $S+1$ 层区域.

将 x 坐标轴上节点从右到左, 按每组 P 个数分成 k ($k \geq 2$) 组, 记为 $k = \lceil (T-1)/P \rceil, r = kP - T$ ($-1 \leq r < P$), 第 1 组数为: $m \leq x_0 \leq T-1$, 由 \bar{v} 方向将节点映射到 L 形瓦正上方第 S 层 $(0, S), (1, S) \dots, (P-1, S)$ 连续区域内.

第 2 组数为: $m-P \leq x_0 \leq m-1$, 坐标变换为

$$(m-1, 0) \xrightarrow{\bar{v}} (-1, S) \xrightarrow{\bar{\rho}} (P-1, S+1)$$

$$(m-2, 0) \xrightarrow{\bar{v}} (-2, S) \xrightarrow{\bar{\rho}} (P-2, S+1)$$

...

$$(m-P, 0) \xrightarrow{\bar{v}} (-P, S) \xrightarrow{\bar{\rho}} (0, S+1)$$

第 2 组节点被映射到 L 形瓦正上方第 $S+1$ 层 $(0, S+1), (1, S+1), \dots, (P-1, S+1)$ 连续区域内.

...

考虑第 k 组: $0 < x_0 \leq P-1-r$

$$(P-1-r, 0) \xrightarrow{\bar{v}} (P-1-r-m, S) \dots$$

$$\xrightarrow{\bar{\rho}} (P-1, S+k+1)$$

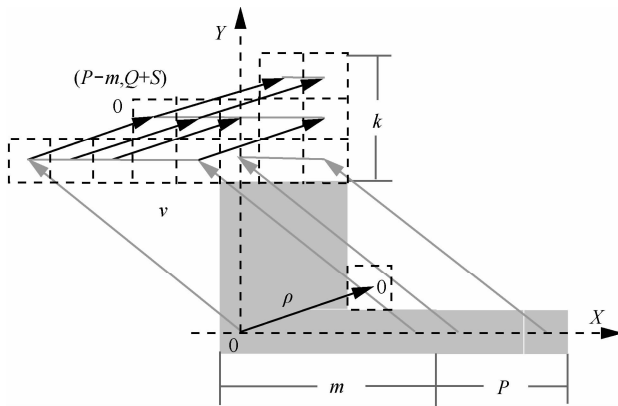
...

$$(1, 0) \xrightarrow{\bar{v}} (1-m, S) \dots \xrightarrow{\bar{\rho}} (r+1, S+k-1)$$

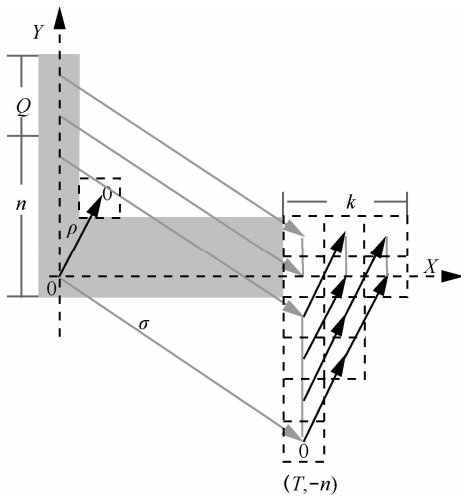
第 k 组节点被映射到 L 形瓦正上方第 $S+k-1$ 层 $(r+1, S+k-1) \dots, (P-1, S+k-1)$ 连续区域内.

综合以上 2 种情形, $P > 1, Q = 1$ 时, x 轴上节点 $1, 2, 3, \dots, m-1, m, \dots, T-1$ 经由 \bar{v} 或 $\bar{\rho}$ 方向路由, 最终被映射到第一象限, 且在 L 形瓦正上方 $(r+1, S+k-1), (r+2, S+k-1), \dots, (P-1, S+k-1), (0, S+k-2), (1, S+k-2), \dots, (P-1, S+k-2), \dots, (0, S), \dots,$

$(P-1, S)$ 连续区域内, 区域高度为 k , 如图 7(a) 所示。



(a) 节点 u 在 x 坐标轴上, $Q=1$



(b) 节点 u 在 y 坐标轴上, $P=1$

图 7 坐标轴上次等价节点分布模型

注意到 x 轴上的节点是一一映射到 L 形瓦正上方连续区域, 因此, 映射区域节点不重复。距离最远的节点坐标为 $(P-1, S+k-1)$, 此时, $d_2(0, u) = k + S + P - 2$ 。

Y 轴上节点 u 可沿 $\vec{\rho}$ 、 $\vec{\sigma}$ 方向找到其等价节点, 和 $P>1, Q>1$ 情形相同。此时, 考虑 L 形瓦右下方距离最远节点坐标 $(T, 0)$, 此时, $d_2(0, u) = T$ 。

据引理 1 知 $S \geq m$, 则 $S + P \geq m + P = T$, 因此网络 2 宽直径为: $d_2(G) = \lceil (T-1)/P \rceil + S + P - 2$ 。

3) $P=1, Q>1$

记 $k = \lceil (S-1)/Q \rceil$, $r = kQ - S (-1 \leq r < Q)$, 和上述情形类似, y 轴上节点 $h(\text{mod } N), 2h(\text{mod } N), \dots, (n-1)h(\text{mod } N), nh(\text{mod } N), \dots, (S-1)h(\text{mod } N)$ 经由 $\vec{\sigma}$ 或 $\vec{\rho}$ 方向路由, 最终被映射到第一象限, 且在 L 形瓦右下方 $(T+k-1, r+1), (T+k-1, r+2), \dots,$

$(T+k-1, Q-1), (T+k-2, 0), (T+k-2, 1), \dots, (T+k-2, Q-1), \dots, (T, 0), \dots, (T, Q-1)$ 连续区域内, 区域长度为 k 。如图 7(b) 所示。

同理可得, 当 $P=1, Q>1$ 时双环网络的 2 宽直径 $d_2(G) = \lceil (S-1)/Q \rceil + T + Q - 2$ 。

4 直角坐标系下双环网络并行最优路由 PDD 图

通过上节分析, 通过 L 形瓦参数可以将 L 形瓦坐标轴上节点分别映射到其他区域, 算法不涉及循环, 为常数步长计算方法。因此, 在双环网络最小路径图即 L 形瓦的基础上可拓展成并行路径图, 用于研究双环网络的并行路由。

4.1 PDD 图构图方法

下面给出 PDD 图的设计思路。其中源点为 0。

1) $P>1, Q>1$

如图 6 所示, 阴影部分为 MDD 图, PDD 图在 MDD 的基础上扩充虚线区域 D_1, D_2, D_3, D_4 即可。

D_1 区域, 节点坐标 $(0, S), (1, S), \dots, (P-1, S)$, 对应数值 $m, m+1, \dots, T-1$ 。

D_2 区域, 节点坐标 $(P, Q), (P, Q+1), \dots, (P, Q+n-1)$, 对应数值 $0, h(\text{mod } N), \dots, (n-1) \cdot h(\text{mod } N)$ 。

D_3 区域, 节点坐标 $(P, Q), (P+1, Q), \dots, (P+m-1, Q)$, 对应数值 $0, 1, \dots, m-1$ 。

D_4 区域, 节点坐标 $(T, 0), (T, 1), \dots, (T, Q-1)$, 对应数值 $nh(\text{mod } N), (n+1)h(\text{mod } N), \dots, (S-1) \cdot h(\text{mod } N)$ 。

2) $P>1, Q=1$

如图 7(a) 所示, 因 x 轴上节点全部被映射到 D_1 区域, D_3 区域舍弃不用。 D_2 区域、 D_4 区域填充数的方法同 1); 对于 D_1 区域, 节点坐标 $(r+1, S+k-1), (r+2, S+k-1), \dots, (P-1, S+1), (0, S), (1, S), \dots, (P-1, S)$, 对应数值 $1, 2, \dots, m-1, m, m+1, \dots, T-1$ 。

3) $P=1, Q>1$

如图 7(b) 所示, 因 y 轴上节点全部被映射到 D_4 区域, D_2 区域舍弃不用。 D_1 区域、 D_3 区域填充数的方法同 1); 对于 D_4 区域, 节点坐标 $(T+k-1, r+1), (T+k-1, r+2), \dots, (T, 0), \dots, (T, Q-1)$, 对应数值 $h(\text{mod } N), 2h(\text{mod } N), \dots, nh(\text{mod } N), \dots, (S-1)h(\text{mod } N)$ 。

对于 PDD 图上节点 u , 当且仅当节点位于坐标

轴上, 节点 u 重复出现。对于重复出现的节点, 除原点 0 外, 有两坐标 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, 其中 (x_0, y_0) 为 MDD 图上该节点坐标, 对应路径 $x_0[+1]+y_0[+h]$, 此路径为最短路径; 另一坐标 (x_1, y_1) , 对应路径 $x_1[+1]+y_1[+h]$, 根据 PDD 图构图方法, 坐标轴上节点 u 被一一映射到不同坐标, 即至少可选择一条路径 $x_1[+1]+y_1[+h]$, 所含节点和路径 $x_0[+1]+y_0[+h]$ 中的节点不重复, 则通过节点 u 坐标就能快速输出节点的并行最短路径。

该算法存在二重循环, 时间复杂度为 $O(n^2)$; 需要空间存储节点, 空间复杂度为 $O(n)$ 。

4.2 PDD 图仿真算法

设源节点为 0 节点, 目的节点: $D(x, y)$, 给出基于直角坐标系下无向双环网络 $G(N; 1, h)$ 并行最优路由算法, 包括 2 个部分。

1) 给出直角坐标系双环网络 $G(N; 1, h)$ 最小路径图即 L 形瓦构图算法。

step1 初始化参数: N, s ; 初始化坐标。

step2 设置初始层数 $Layer=1$; 设置 X 轴坐标变量 i, Y 轴坐标变量 j ; 第一遍访问: $i=1, j=0; i=0, j=1$, 按双环网络 MDD 构图规则放置节点。

step3 $Layer=Layer+1$; 按层遍历, 沿 X 轴 Y 轴按序访问节点, 判断 (i, j) 处节点是否在 $Layer$ 之前的层中已被访问过, 没有则放置该节点, 否则跳过该节点遍历下一个节点。

step4 遍历节点的同时画矩形、标记节点。

step5 重复 step3~step4, 直到所有节点均被访问。

该算法存在二重循环, 时间复杂度为 $O(n^2)$; 该算法需要空间存储节点, 空间复杂度为 $O(n)$ 。

2) 给出直角坐标系下双环网络 $G(N; 1, h)$ 并行路径图构图算法。

step1 计算双环网络 L 形瓦各参数, 根据引理 1 计算 S, T, m, n , 计算 $P, Q (P=T-m, Q=S-n)$ 。

step2 判断 P, Q , 按 PDD 图构图规则, 在 MDD 图上补充坐标轴上节点的等价节点; 直到坐标轴上节点均被再次遍历为止。

4.3 PDD 图仿真实例

用 Visual Basic6.0 语言编制程序来仿真双环网络 MDD 图, 并在 MDD 图的基础上仿真 PDD 图, 输出源点 0 到任一其他节点的并行路径 (即节点坐标), 并计算网络直径及宽直径, 下面给出 PDD 图仿真实例。

$P>1, Q>1$ 时 $G(39; 1, 17)$ 的 PDD 仿真如图 5 所示; $P=1, Q>1$ 时 $G(15; 1, 7)$ 的 PDD 仿真如图 8 所示; $P>1, Q=1$ 时, $G(15; 1, 13)$ 的 PDD 仿真如图 9 所示。

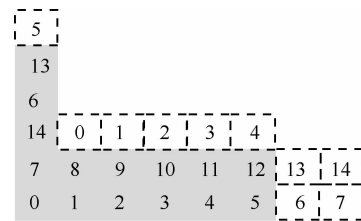


图 8 双环网络 $G(15; 1, 7)$ 的 PDD

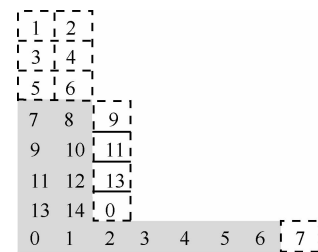


图 9 双环网络 $G(15; 1, 13)$ 的 PDD

观察双环网络的 PDD 图可知, 当 $P>1, Q>1$ 时, 双环网络的宽直径取小值的可能性较 $P=1$ 或 $Q=1$ 的情形大, 后者 PDD 图上节点在 L 形瓦右方或 L 形瓦上方呈离散分布趋势, 从而使得网络宽直径变大。

5 宽直径分布

Wong 和 Coppersmith^[12]证明双环网络 $G(N; 1, s)$ 的直径大于或等于 $\text{lb}(N) = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2$, 这里 $\lceil X \rceil$ 表示不小于 X 的最小整数, 称直径达到下界的双环网络为紧优双环网络^[2], 它们也给出了双环网络 $G(N; 1, s)$ 平均距离的下界: $\sqrt{25N/27} - 1$, 当且仅当 $m = n = p = q = \sqrt{N/3}$ 时平均距离达到下界。

根据第 3 节给出的双环网络宽直径公式, 易证双环网络的宽直径不小于 $\text{lb}(N) + 1 = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 1$ 。

考察宽直径、直径、平均距离的分布特性, 如图 10 所示, 为双环网络 $G(500; 1, h)$ 宽直径、直径、平均距离分布, 宽直径分布曲线、直径分布曲线基本重合, 因为直径和宽直径数据相差较小。从图上可以直观看出三者关系为: 宽直径 > 直径 > 平均距离, 且直径 \approx 平均距离的 2 倍。宽直径、直径、平均距离分布呈现一定的波动性。三者的分布趋势大体上一致, 当 $h \approx N/2$ 时, $G(N; 1, h)$ 的宽直径、直径、平均距离取得最大值, 因为此时双环网络退化为单环网, 因而网络性能显著下降。

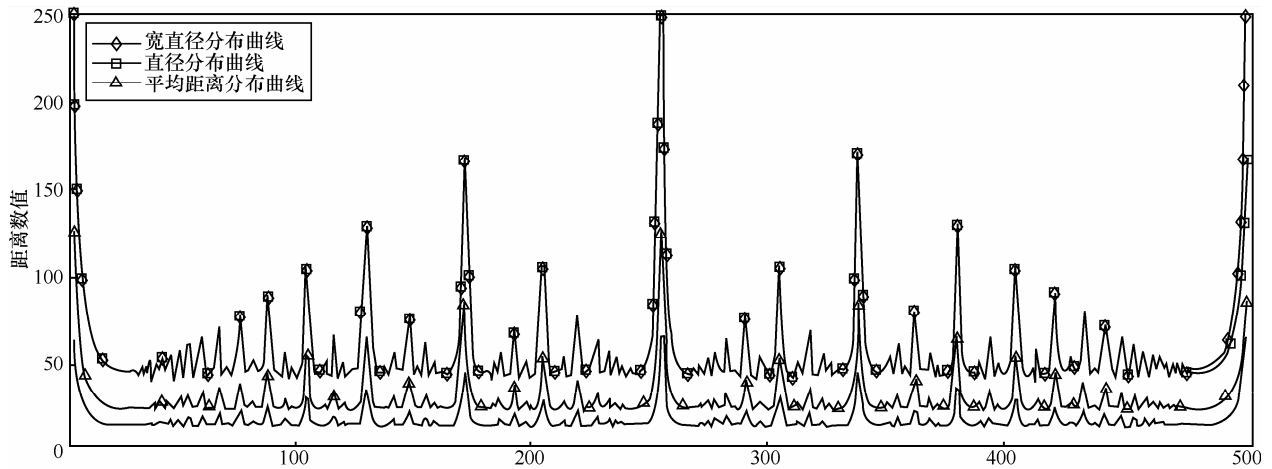


图 10 双环网络 $G(500;1,h)$ 宽直径、距离、平均距离分布特性

表 1 $G(500;1,h)$ 宽直径、平均宽距离数据

序号	N	r	h	直径	平均距离	宽直径
1	500	1	2	250	125	251
2	500	1	3	167	83.832	168
3	500	1	4	127	63.5	128
4	500	1	5	103	51.5	104
5	500	1	6	87	43.66	88
6	500	1	7	76	38.204	77
7	500	1	8	68	34.236	69
8	500	1	35	37	20.6	38
9	500	1	44	37	20.612	38
10	500	1	93	37	20.612	38
11	500	1	408	37	20.612	38
12	500	1	457	37	20.612	38
13	500	1	466	37	20.6	38

从图 10 可以看出，通过并行传输数据，双环网络整体传输效率明显得到改进，此处效率约提高 1 倍。相对于传统的寻径方式，并行最优寻径明显加快了网络传输速度。

将宽直径、直径、平均距离 3 个参数结合起来，寻找一类双环网络，其直径、平均距离、宽直径均能取得较小值，那么，毫无疑问，此类双环网络传输性能是最优的。

针对双环网络 $G(11;1,h)$ ，如果仅仅考察直径和平均距离，则当 $h=3、4、5、7、8、9$ 时，直径、平均距离均取得最小值；加入宽直径指标，则只有 $h=3、4$ 时，直径、平均距离、宽直径均能取得较小值，因此，对于 $N=11$ 时， $h=3、4$ 的双环网络性能较优。

综合直径、平均距离、宽直径考察双环网络，

其步长的选用很难找到递推公式，因此，在设计双环网络时，可以根据 N 值，预先计算好双环网络的直径、平均距离、宽直径，择优选用步长 h ，如表 1 所示。根据表 1 中的数据知，当 $N=500$ 时， $h=35、44、93、408、457、466$ 时的双环网络性能较优。Wong 和 Coppersmith 曾给出较优步长 $h \approx \lceil \sqrt{N} \rceil$ ，当 $N=500$ 时， $h \approx \lceil \sqrt{500} \rceil = 22$ ，此时双环网络性能不如 $h=35、44、93、408、457、466$ ，因此 $h \approx \lceil \sqrt{N} \rceil$ 作为选择较优双环网络的指标，存在一定误差。

6 结束语

针对双环网络的并行寻径，本文将双环网络拓

扑结构映射到平面直角坐标系, 基于直角坐标系研究双环网络的并行最优寻径策略。基于坐标映射方法研究坐标轴上节点的等价节点分布规律, 在此基础上研究节点并行最优寻径策略及双环网络宽直径的求解方法, 并得出了双环网络并行最优寻径的直观模型——PDD 图, 由传统 L 形瓦拓展得到。

进一步, 本文研究双环网络宽直径、直径、平均距离的分布, 仿真实验表明, 宽直径分布随步长的变化呈现一定波动性, 相对于传统的寻径方式, 并行最优寻径明显提高了网络传输效率。

参考文献:

- [1] 方木云, 赵保华, 屈玉贵. 双环网络的 $[+h]$ 边优先寻径策略[J]. 计算机学报, 2008, 31(3): 536-542.
FANG M Y, ZHAO B H, QU Y G $[+h]$ -link prior routing strategy for double-loop network[J]. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(3): 536-542.
- [2] 陈协彬. 步长有限制的双环网络的最优路由算法[J]. 计算机学报, 2004, 27(5): 596-603.
CHEN X B. An optimal routing algorithm for double loop networks with restricted steps[J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(5): 596-603.
- [3] HWANG F K. A survey on multi-loop networks[J]. Theoretical Computer Science, 2003, 299: 107-121.
- [4] HWANG F K. A complementary survey on double-loop networks[J]. Theoretical Computer Science, 2001, 263: 211-229.
- [5] 徐俊明. 计算机互联双环网络的最优设计[J]. 中国科学(E 辑), 1999, 42(5): 462-469.
XU J M. Designing of optimal double loop networks[J]. Science in China(Series E), 1999, 42(5): 462-469.
- [6] 陈业斌, 李颖, 郑啸等. 关于有向环网平均直径的研究[J]. 通信学报, 2013, 34(2): 138-146.
CHEN Y B, LI Y, ZHENG X, *et al.* On the average diameter of directed loop networks[J]. Journal on Communications, 2013, 34(2): 138-146.
- [7] 徐俊明, 谢歆. 关于图的容错直径和宽直径[J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(2): 135-139.
XU J M, XIE X. On fault-tolerant diameter and wide diameter of graphs[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2002, 32(2): 135-139.
- [8] HSU D F. On container width and length in graphs, groups, and networks[J]. IEICE Transaction on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Science, 1994, 77(4): 668-680.
- [9] 陈宝兴, 杜妮, 周书明. 有向双环网络的宽直径公式[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2008, 47(6): 782-786.
CHEN B X, DU N, ZHOU S M. The wide diameter formula of a directed double loop network[J]. Journal of Xiamen University(Natural Science), 2008, 47(6): 782-786.
- [10] CHEN Y B, LI Y, WANG J K. On the wide diameter of directed double-loop networks[J]. Journal of Network and Computer Applications, 2011, 34(1): 692-696.
- [11] 刘辉, 方木云. 直角坐标系下无向双环网络 $G(N; \pm 1, \pm s)$ 的直径研究[J]. 通信学报, 2011, 32(1): 138-143.

LIU H, FANG M Y. Research on the diameter of bidirectional double-loop networks $G(N; \pm 1, \pm s)$ in Cartesian coordinates[J]. Journal on Communications, 2011, 32(1): 138-143.

- [12] WONG C K, COPPERHIMITH D. A combinatorial problem related to multi-module memory organizations[J]. Journal of Association for Computing Machinery, 1974, 21(3): 392-402.
- [13] 刘焕平, 杨义先, 杨放春. 双环网 $G(N; s_1, s_2)$ 的直径[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(2): 58-61.
LIU H P, YANG Y X, YANG F C. The diameter of double-loop networks $G(N; s_1, s_2)$ [J]. System Engineering Theory & Practice, 1999, 19(2): 58-61.
- [14] CHEN C Y, HWANG F K. The minimum distance diagram of double-loop networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 2000, 49(9): 977-979.

作者简介:



刘辉 (1979-), 男, 安徽桐城人, 安徽工业大学副教授, 主要研究方向为计算机网络、数据挖掘与分析处理等。



张珍 (1990-), 女, 安徽蚌埠人, 安徽工业大学硕士生, 主要研究方向为计算机网络、数据处理等。



方木云 (1968-), 男, 湖北罗田人, 安徽工业大学教授, 主要研究方向为软件度量、软件可靠性等。



郑啸 (1975-), 男, 福建莆田人, 安徽工业大学教授, 主要研究方向为计算机网络和分布式系统、服务计算。

陈业斌 (1971-), 男, 安徽全椒人, 安徽工业大学教授, 主要研究方向为计算机网络和数据库。